pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Quan estic acabant de redactar aquest article m'arriba la tradicional felicitació de les festes nadalenques i de l'any nou, en forma de problema, de l'amic Ignasi del Blanco. Encara que molts de vosaltres també l'haureu rebut, i segurament solucionat, el recordo per a aquells que no el tinguin:

Intercalar les operacions que es vulgui als nombres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 per tal que el resultat sigui 2016, tot mantenint l'ordre dels nombres. Si acceptem l'ús de parèntesis, no us costarà gaire trobar una de les moltes solucions possibles, però si volem evitar-los, per obtenir una solució ben «elegant», la cosa ja no és tant senzilla. De fet, després de pensar-hi una estona i no haver-ne trobat cap, seguia sospitant que n'hi hauria una, o potser més d'una, fins que l'amic Joan Jareño em va mostrar un munt de solucions boniques d'alumnes de l'institut Baix a Mar, de Vilanova. Una de les solucions, trobada per un alumne d'en Jordi Font, era magnífica i no utilitzava cap parèntesi. Us animo a trobar-les i, si es resisteixen, sempre podeu consultar el web del creamat.

Tornem al 2016, el quart any de traspàs del mil·lenni, any internacional de la llum i, per sobre de tot, any del Congrés Català d'Educació Matemàtica. D'entrada, no sembla ser un nombre gaire excepcional, més enllà de tenir un nombre considerable de divisors, i que aquest nombre és divisor de 2016, a diferència dels tres anys precedents, que en tenien força menys. L'elevat nombre de divisors fa que sigui un nombre abundant (la suma dels seus divisors és 6552) i es pot expressar com a suma de tan sols tres dels seus divisors: 1008 + 672 + 336. És clar que això no és gaire excepcional, ja que passa per qualsevol nombre que sigui múltiple de 6.

La cosa s'anima, ja que, a més, resulta que és el 63è nombre triangular, és a dir, $1+2+3+\cdots+63 = 2016$. A partir d'aquí comencen a sorgir propietats boniques, relacionades amb aquest tipus de nombres, com m'ha mostrat l'Anton Aubanell, que ha passat una bona estona estudiant aquest magnífic nombre. Com diu l'Anton, atès que l'anterior triangular és el 1953, i el següent serà el 2080, fa que per a molta gent aquest sigui el triangular de la seva vida. És clar que altres, que com jo tenim alguns anys més, tindrem el privilegi d'haver viscut en dos anys triangulars. Viure'n tres no sembla a l'abast de cap de nosaltres: els nascuts el 1953 haurien de viure almenys 127 anys!

També resulta que 2016 és el 32è nombre hexagonal, és a dir, pertany a la successió: 1, 6, 15, 28... que correspon als triangulars senars. D'altra banda, fixeu-vos que l'expressió binària de 2016 és 11111100000, la qual cosa indica que 2016 es pot expressar com a suma de 6 potències de dues consecutives.

Finalment, si el dividim per 4, és a dir, el factor que fa que sigui any de traspàs, obtenim 504, que es un nombre un xic més curiós. En efecte, $504 = 12 \times 42$, i també, $504 = 21 \times 24$. Hi ha 13 parells de nombres de dos dígits tals que en invertir els dígits el producte es manté. El més gran és el $3024 = 36 \times 84 = 63 \times 48$... A veure si trobeu els altres onze parells!

I ja que hem començat amb nombres enters, seguim amb aquests i proposem un parell de situacions que permeten fer matemàtiques senzilles però interessants. La primera és un excel·lent problema per fer, tant a primària, en relació amb el valor de posició, com a l'ESO, si la relacionem amb el pas de l'aritmètica a l'àlgebra. La trobareu desenvolupada a l'apartat «Investiguem» (proposta 14, octubre de 2015) del web del creamat.

► **Problema 1.** En un tauler 2×2 situem nombres diferents, de l'1 al 9, en les quatre caselles. Després formem quatre nombres de dues xifres, considerant les files i les columnes del tauler. Finalment, sumem aquests quatre nombres i obtenim el total.

Exemple: Posant 3, 7, 4 i 1, tal com es veu al tauler, s'obtenen els nombres 37, i 41 (horitzontal) i 34 i 71 (vertical), la suma o total dels quals és 183.

3	7
4	1

A partir d'aquesta situació ens podem fer moltes preguntes, com per exemple:

a) Quins nombres haurem de posar a la taula per obtenir un total de 200?
b) Quin és el total més gran, i el més petit, que podem obtenir?
c) Quins nombres posarem per obtenir un total parell (o senar)?
d) Es poden obtenir tots els valors entre el mínim i el màxim?

I tantes altres preguntes que vosaltres o els vostres alumnes podeu generar.

El següent problema l'he extret de les proves a l'esprint per a tercer i quart d'ESO, realitzades el desembre de 2015. M'ha semblat un repte molt interessant i un xic difícil per als nois i noies d'aquesta edat, encara que cal dir que formava part dels problemes de «propina», aquells que es fan una vegada acabat el concurs.

► **Problema 2.** Trobeu el menor valor dels nombres enters positius m i n, de manera que les fraccions pròpies: $m/n, (m+1)/(n+1), (m+2)/(n+2) \cdots (m+5)/(n+5)$, siguin totes reductibles. Una vegada resolt el problema per a 6 fraccions no us costarà gaire generalitzar-lo a un nombre qualsevol p i argumentar que tindrà solució per a qualsevol quantitat de fraccions.

Deixem els nombres, que fins ara ens han servit per a plantejar reptes interessants, i anem a la geometria. Seguint amb els problemes a l'esprint, aquest correspon al concurs que es va realitzar el dissabte 19 de desembre de 2015, i era un dels darrers problemes de primer nivell. Haig de dir que va ser un problema difícil per als alumnes amb talent que porten a terme aquesta activitat, tot i que a mi no m'ho havia semblat quan el vaig resoldre. Una vegada més, es confirma la poca familiaritat amb problemes de geometria que tenen els nostres alumnes, en comparació amb els problemes numèrics. L'enunciat estava plantejat a partir d'un dibuix que ometré per fer-lo un xic més difícil, tot i que estic segur que aquells a qui us agraden els problemes geomètrics no només el resoldreu amb una certa facilitat, sinó que, a més, trobareu una interessant generalització.

► **Problema 3.** S'inscriu un rectangle en un quadrat donat (s'entén que el rectangle té un vèrtex sobre cada costat del quadrat) i es coneix la raó entre la llargada i l'amplada del rectangle; per exemple, 4. Quina és la raó entre l'àrea del rectangle i l'àrea de la part del quadrat externa al rectangle?

Seguint amb la geometria, plantejaré un petit joc d'estratègia per a dos jugadors, d'aquells que tant m'agraden.

► **Problema 4.** Partim d'un tetraedre i a cada jugada el jugador que té el torn elimina una cara, una aresta o un vèrtex. Això fa que s'eliminin altres elements del tetraedre (una cara s'elimina quan li falta alguna de les arestes que la componen, una aresta quan falta un dels vèrtexs que la delimiten i un vèrtex quan queden menys de dues arestes que hi conflueixen). El jugador que en eliminar un element aconsegueix que no en quedi cap és el guanyador de la partida. Quina és l'estratègia que permet guanyar a un dels dos jugadors? Quan l'hagueu trobat per al cas del tetraedre, penseu què passaria si la figura inicial fos un altre poliedre.

En Jordi Font, professor de matemàtiques de Vilanova, em va proposar un problema, a mig camí entre la geometria i els nombres, força bonic i molt més complicat del que pot semblar a primera vista. En tot cas, la seva resolució genera matemàtiques interessants i això és el que fa que sigui un problema al qual val la pena dedicar una bona estona.

► **Problema 5.** Si coneixem el volum d'un prisma i aquest s'expressa amb un nombre enter, quines són les longituds de les seves arestes si sabem que també s'expressen amb nombres enters?

Per exemple, si el volum és de 6 unitats cúbiques, hi ha tan sols dues solucions: 1,1,6 i 1,2,3, mentre que si el volum és 12, ara el nombre de solucions és 4. És clar que si el volum s'expressa amb un nombre primer, tan sols hi ha una solució, però a mesura que augmenten els divisors la cosa es complica, i molt! Si us hi atreviu, penseu quantes solucions hi hauria per a un volum de 2016 unitats cúbiques.

Força més senzill és considerar el problema en el pla, és a dir, coneguda l'àrea d'un rectangle, que s'expressa amb un nombre enter, trobar quant mesuren els seus costats sabent que també s'expressen amb nombres enters.

Acabaré amb un altre problema de geometria, que al meu parer és força més difícil que tots els anteriors. Me'l va proposar fa poc en Josep Maria Fortuny, company del departament.

Segurament molts de vosaltres coneixeu el Teorema de Viviani (matemàtic italià que visqué a Florència entre 1622 i 1703 i que va treballar amb Galileu), d'acord amb el qual la suma de les distàncies als tres costats d'un triangle equilàter des d'un punt interior del triangle és constant, és a dir, no depèn del punt, i equival a l'altura del triangle. D'aquest teorema se n'han donat diverses demostracions, algunes de les quals molt boniques i estrictament visuals. És fàcil veure que si el triangle no és equilàter, el teorema no es compleix i, per tant, es pot plantejar el següent problema d'extrems.

► **Problema 6.** Quin és el punt del pla tal que la suma de les distàncies des d'aquest punt als tres costats d'un triangle donat és mínima?

Amb aquest problema, que espero que us tingui entretinguts una bona estona, m'acomiado de tots i totes fins a la propera ocasió.